DM n°4 : Corrigé

On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes généraux respectifs :

$$u_n = H_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

1) Justifier que : $\forall x > -1 \quad \ln(1+x) \leq x$. On pose $f : x \in \left]-1,+\infty\right[\mapsto \ln(1+x) - x$. Montrons que $f \leq 0$. f est dérivable comme différence et composée de telles fonctions. Pour tout $x > -1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \frac{1}{1+x} > 1 \\ &\iff 1 > 1+x \qquad \text{car } 1+x>0 \\ &\iff x < 0 \end{aligned}$$

Un tableau de variations (non reproduit ici) montre alors que f atteint son maximum en 0. De plus, $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$, donc on a bien $f \leq 0$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, comme $\frac{1}{n} > -1$:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

De plus,

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, comme $-\frac{1}{n+1} > -1$, on a de même

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}$$

D'où le résultat.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Or, par ce qui précède, on a donc

$$\frac{1}{n+1} \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{n}$$

donc par encadrement, on en déduit que $v_n - u_n \to 0$. Étudions les variations de (u_n) et (v_n).

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

et par la question précédente, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc (u_n) est décroissante. Ensuite

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{N} - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \qquad \text{avec } N = n+1 \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Or, par la question précédente, on en déduit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Donc (v_n) est croissante. Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

4) En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

Par la question précédente, (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Notons $\gamma = \lim u_n$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = H_n - \ln n \to \gamma$$

Cela permet de déduire que

$$\begin{aligned} H_n &= \ln n + u_n \\ &= \ln n + \gamma + (u_n - \gamma) \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_n := u_n - \gamma$. Alors on a bien $\varepsilon_n \to 0$ et $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$. Par la question précédente, on a $\lim u_n = \lim v_n = \gamma$. De plus, par la question 3, on a (u_n) décroissante et (v_n) croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \lim v_n = \gamma = \lim u_n \leq u_n$.

6) Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_N - \gamma| \leq 10^{-3}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |u_N - \gamma| &= u_N - \gamma \\ &\leq u_N - v_N \qquad \text{par la q. 5} \\ &= -\ln N + \ln(N+1) \\ &= \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de trouver N tel que

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \leq 10^{-3}\\
\iff &\frac{N+1}{N} \leq e^{10^{-3}}\\
\iff &Ne^{10^{-3}} \geq N+1\\
\iff &N\left(e^{10^{-3}}-1\right) \geq 1\\
\iff &N \geq \frac{1}{e^{10^{-3}}-1}
\end{aligned}$$

On remarque donc que $N = \left\lfloor \frac{1}{e^{10^{-3}}-1} \right\rfloor + 1$ convient.

7) Écrire un script Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui retourne le n-ième terme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire une estimation de γ à 10^{-3} près.

```python
import math

def u(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1): # pour k allant de 1 à n
        s = s+1/k
    return s-math.log(n)

# estimation à 10**(-3) près

fraction = 1/(math.exp(10**(-3))-1)
N = math.floor(fraction) + 1  # floor = partie entière
print('valeur approchée de gamma à 10**(-3) près :')
print(u(N))
```

L'algorithme doit retourner "`0.5777155815682065`"

La valeur de γ avec une meilleure approximation est : "`0.5772156649`". On peut utiliser l'algorithme ci-dessus pour pousser le calcul plus loin (pour aller jusqu'à la décimale p, il suffit de remplacer $e^{10^{-3}}$ par $e^{10^{-p}}$). Mais le temps de calcul devient trop élevé à partir de $p = 9$.